# 第五单元 平面向量及其应用、复数

## 基础课27 平面向量的概念及其线性运算

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 平面向量的线性运算 | 掌握 | 2023年全国甲卷（理）  2023年天津卷  2022年新高考Ⅰ卷  2020年新高考Ⅱ卷 | ★★☆ | 数学运算  直观想象 |
| 共线向量定理及其应用 | 理解 | 2021年全国乙卷（文） | ★★☆ | 数学运算  直观想象 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，平面向量的概念及其线性运算一般以选择题或填空题的形式出现，常与其他知识交汇考查，试题较为简单.预计2025年高考不会单独命题 | | | |

### 基础知识·诊断

#### 夯实基础

##### 一、向量的有关概念

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 名称 | 定义 | 备注 |
| 向量 | 既有①大小又有②方向的量叫作向量 | 自由向量 |
| 长度（或称模） | 向量的大小 | 记作或 |
| 零向量 | 长度为③0的向量 | 记作0 |
| 单位向量 | 长度等于1个单位长度的向量 | 非零向量的单位向量为④ |
| 平行向量（共线向量） | 方向⑤相同或相反的非零向量 | 向量，平行，记作⑥ |
| 相等向量 | 长度⑦相等且方向相同的向量 | 两个向量不能比较大小 |
| 相反向量 | 长度⑧相等且方向相反的向量 | 0的相反向量为0 |

##### 二、向量的线性运算

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 向量运算 | 定义 | 法则（或几何意义） | 运算律 |
| 加法 | 求两个向量和的运算 |  | （1）交换律：.  （2）结合律： |
| 减法 | 求两个向量差的运算 |  |  |
| 数乘 | 规定实数与向量的积是一个向量，这种运算叫作向量的数乘，记作 | （1）；  （2）当时，的方向与的方向⑪相同；当时，的方向与的方向⑫相反；当时， | ；  ； |

##### 三、共线向量定理

向量与共线的充要条件：存在唯一一个实数 ，使⑬.

###### 知识 拓展

1.零向量与任何向量共线.

2.若存在非零实数 ，使得或或，则，，三点共线.

3.中点公式的向量形式：若为线段的中点，为平面内任意一点，则.

4.（ ， 为实数），若点，，共线，则.

#### 诊断自测

##### 题组1 走出误区

1. 判一判.（对的打“√”，错的打“×”）

（1） 若向量与是共线向量，则，，，四点在同一条直线上.( × )

（2） 向量不能比较大小，但向量的模可以比较大小.( √ )

（3） 向量与有向线段是一样的，因此可以用有向线段来表示向量.( × )

（4） 与是否相等与，的方向无关.( √ )

2. （易错题）下列四个说法正确的是( D ).

A. 若，则 B. 若，则

C. 若，则 D. 若，则

**【易错点】**忽视理解向量的概念而致误.

[解析]中，，,则，但,故不正确；，中，由于向量，的大小相等，但其方向不确定，故，都不正确；显然正确.故选.

##### 题组2 走进教材

3. （人教A版必修②P14·例6改编）在平行四边形中，的中点为，且，，用，表示.

[解析].

4. （人教A版必修②P16·例8改编）已知，是两个不共线向量，向量与共线，则实数.

[解析]由题意知，存在实数 ，使得，则解得.

##### 题组3 走向高考

5. [2022·新高考Ⅰ卷]在中，点在边上，.记，，则( B ).

A.B.C.D.

[解析]因为点在边上，，所以，即，所以.故选.

### 考点聚焦·突破

#### 考点一 平面向量的概念［自主练透］

1. （多选题）下列说法中错误的是( BC ).

A. 平行向量就是共线向量

B. 相反向量就是方向相反的向量

C. 若与同向，且，则

D. 两个向量平行是这两个向量相等的必要不充分条件

[解析]由平行向量和共线向量的定义可知，正确；

因为相反向量是方向相反，长度相等的两个向量，所以错误；

因为向量是既有大小又有方向的量，所以任何两个向量都不能比较大小，所以错误；

因为两个向量平行不能推出两个向量相等，而两个向量相等可以推出这两个向量平行，因此两个向量平行是这两个向量相等的必要不充分条件，所以正确.故选.

2. [2024·厦门开学考试]下列说法不正确的是( A ).

A. 零向量是唯一没有方向的向量

B. 零向量的长度等于0

C. 若，都为非零向量，则使成立的条件是与反向共线

D. 若，，则

[解析]对于，零向量是有方向的，其方向是任意的，故不正确；

对于，由零向量的定义知，零向量的长度为0，故正确；

对于，因为与都是单位向量，所以只有当与是相反向量，即与反向共线时，才成立，故正确；

对于，由向量相等的定义知正确.故选.

3. [2024·河南联考]已知四边形，下列说法正确的是( A ).

A. 若，则四边形为平行四边形

B. 若，则四边形为矩形

C. 若，且，则四边形为矩形

D. 若，且，则四边形为梯形

[解析]对于，若，则且，则四边形为平行四边形，故正确；

对于，若四边形为等腰梯形，则，但是四边形不是矩形，故错误；

对于，若，且，则四边形可以是等腰梯形,也可以是矩形，故错误；

对于，若，且，则四边形可以是平行四边形，也可以是等腰梯形，故错误.故选.



**平面向量相关概念的四个关注点**

1.相等向量具有传递性，非零向量的平行也具有传递性；

2.共线向量即平行向量，它们均与起点无关;

3.向量可以平移，平移后的向量与原向量是相等向量,解题时，不要把它与函数图象移动混为一谈；

4.非零向量与的关系：是方向上的单位向量.

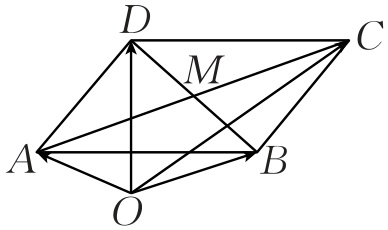
#### 考点二 平面向量的线性运算［多维探究］

##### 向量的加、减运算的几何意义角度1

典例1 设为平行四边形对角线的交点，为平行四边形所在平面内的任意一点，则( D ).

A. B. C. D.

[解析]如图，在中，为的中点，所以,在中，，所以.故选.



##### 向量的线性运算角度2

典例2 [2024·成都模拟]在中，，，则( D ).

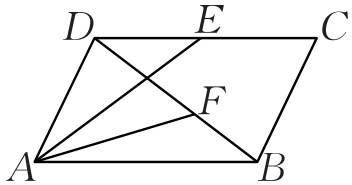
A. B. C. D.

[解析]在中，由，得，由，得，

所以.故选.

##### 利用向量的线性运算求参数角度3

典例3 如图,在平行四边形中,是的中点,为线段上的一个三等分点,且,若,则.



[解析]由题意知,

所以,

因为,不共线,所以,,故.



**平面向量线性运算的常见类型及解题策略**

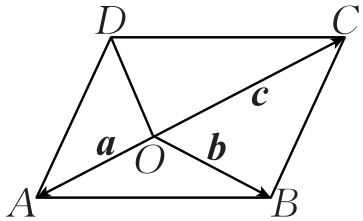
1.向量求和用平行四边形法则或三角形法则，求差用向量减法的几何意义；

2.找出图形中的相等向量、共线向量，将所求向量与已知向量转化到同一个平行四边形或三角形中求解;

3.求参数问题可以通过向量的运算将向量表示出来，进行比较，求参数的值.

##### 多维训练

1. 如图所示，已知点到平行四边形的三个顶点,,的向量分别为,,，则( A ).



A. B. C. D.

[解析].故选.

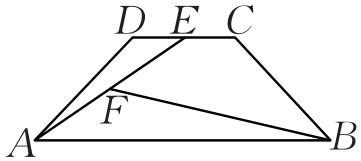
2. 已知在中，，则( A ).

A. B. C. D.

[解析]在中，因为，所以,

则.故选.

3. [2024·梅州模拟]（多选题）如图所示，四边形为等腰梯形，，，，分别为，的中点.若，则( BC ).



A. B. C. D.

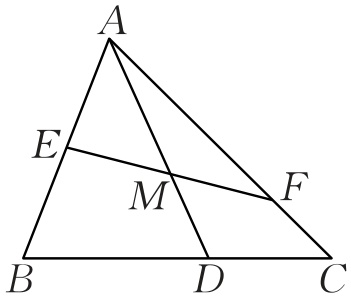
[解析]因为，，为的中点，所以，

因为为的中点，所以，

所以，所以，.故选.

#### 考点三 共线向量定理及其应用［师生共研］

典例4（1） [2024·海口模拟]如图，在中，是的中点，,,与交于点，则( A ).



A. B. C. D.

[解析]在中，设,，由，可得，故.

又是的中点，，所以,，

所以.

由,,三点共线，可得，解得，

故.故选.

（2） [2024·秦皇岛校考]已知，，，，为两个不共线的向量，则( A ).

A. ，，三点共线 B. ，，三点共线

C. ，，三点共线 D. ，，三点共线

[解析]对于，，

因为，所以，则与共线，

又与有公共点，所以，，三点共线，正确；

对于，设，即解得则 不存在，

所以与不共线，即，，三点不共线，错误；

对于，设，即解得则不存在，

所以与不共线，即，，三点不共线，错误；

对于，，

令，即解得则不存在，

所以与不共线，即，，三点不共线，错误.故选.



**利用共线向量定理解题的策略**

|  |  |
| --- | --- |
| 证明向量共线 | 对于向量，，若存在实数，使，则与共线 |
| 证明三点共线 | 若存在实数，使得，则,,三点共线 |
| 求参数的值 | 利用,,构造含有参数的方程（组），解方程（组）得到参数的值.若与不共线,且，则 |

##### 针对训练

设，是两个不共线的向量，已知，，.

（1） 求证：，，三点共线.

[解析]由已知得，因为，所以.

又与有公共点，所以，，三点共线.

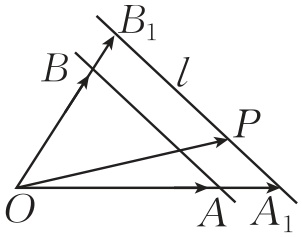
（2） 若，且，，三点共线，求的值.

[解析]由（1）可知，因为，且，，三点共线，所以可设，即，所以解得.

### 拓展教材 深度学习

**等和线定理**

我们知道，若,,三点共线，则，其中.在此结论基础上，再进一步推广： 平面内一个基,及任一向量,，如图，若点在直线上或在平行于的直线上，则（定值），反之也成立,我们把直线以及与直线平行的直线称为等和线.



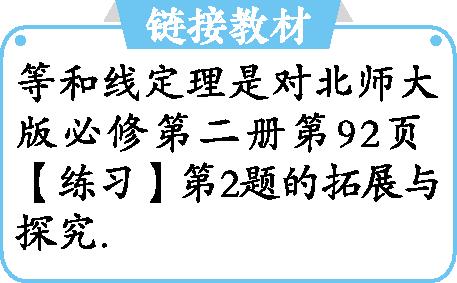
（1）当等和线恰为直线时，；

（2）当等和线在点和直线之间时，；

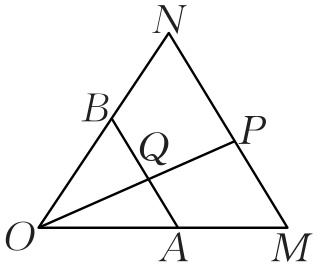
（3）当直线在点和等和线之间时，；

（4）当等和线过点时，；

（5）若两等和线关于点对称，则定值互为相反数；的变化与点到等和线的距离成正比.



典例 （等和线定理的推导）若为直线外一点，如图所示，为与平行的直线.若，为上一点，且，求证：.



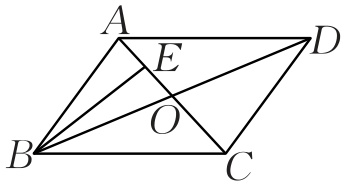
[解析]因为与平行，所以，

所以,，

所以，

因为,,三点共线，所以，所以.

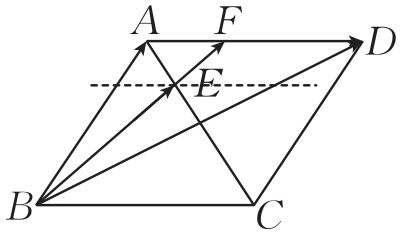
深度训练 [2024·六安模拟]（一题多解）如图，在平行四边形中，，相交于点，为线段的中点.若，则( B ).



A. 1 B. C. D.

[解析]（法一：通法）为线段的中点，

，，，则.故选.



（法二：等和线法）如图，是定值为1的等和线，延长交于点,过点作的平行线，设，

则.由图易知，，故选.